

NOVEMBER/DECEMBER 2019

BMA53 — COMPLEX ANALYSIS – I

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Evaluate $\frac{-1+3i}{2-i}$.

$\frac{-1+3i}{2-i}$ மதிப்பு காண்க.

2. Write formula for $\sinh z$, $\cosh z$ and $\tanh z$ in hyperbolic functions.

$\sinh z$, $\cosh z$ மற்றும் $\tanh z$ என்ற அதிபரவளைய சார்பின் வாய்ப்பாட்டினை எழுதுக.

3. Define continuous at a point.

ஒரு புள்ளியின் தொடர்ச்சியை வரையறு.

4. What is an Entire function?

முழுச் சார்பு என்றால் என்ன?

5. Define critical point.

மாறுநிலை புள்ளி வரையறு.

6. Define isogonal mapping.
சமகோண கோப்பு வரையறு.
7. Define Mobius transformation.
மோபியர் உருமாற்றம் வரையறு.
8. Write the Laplace equation.
லெப்லாஸ் சமன்பாட்டை எழுதுக.
9. Define simple closed contour.
எளிய மூடிய வளைய கோடு வரையறு.
10. State the Cauchy-Goursat theorem.
காஷியின் கூர்சாட் தேற்றத்தை எழுதுக.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Show that $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ எனக் காட்டுக.

Or

- (b) List the properties of trigonometric functions.

கோணவியல் சார்புகளின் பண்புகளை பட்டியலிடுக.



- (b) If a function f is analytic at a point then prove that its derivatives of all orders are also analytic functions at that point.

f என்ற சார்பு ஒரு புள்ளியில் பகுமுறை எனில் அதனுடைப் அனைத்து வரிசை வகைக்கெழுக்களும் அதே புள்ளியில் பகுமுறை சார்பாகும் என நிறுவுக.

SECTION C — $3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. Explain the inverse trigonometric functions.
நேர்மாறு கோண சார்பை விவரி.
17. Derive the Cauchy's Riemann equations.
காஷி ரெய்மான் சமன்பாடுகளை தருவிக்கவும்.
18. If a function f is analytic and $f(z) \neq 0$ to each point z , prove the mapping $w = f(z)$ is conformal.
 f என்ற சார்பானது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் பகுமுறைச் சார்பாகவும், $f(z) \neq 0$ ஆகவும் இருப்பின் கோப்பு $w = f(z)$ ஒரு டொது வடிவக் கோட்பாடு என நிறுவுக.
19. Explain the function $\frac{1}{z}$.
 $\frac{1}{z}$ என்ற சார்பை விவரி.
20. State and prove Cauchy's Integral formula.
காஷியின் தொகை வாய்ப்பாட்டுத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

12. (a) If $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ and $w_0 = u_0 + iv_0$ then prove that

(i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ if and only if

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ and $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ மற்றும் $w_0 = u_0 + iv_0$ எனில்

(i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ தேவையான மற்றும்

போதுமான நிபந்தனைகள்

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ மற்றும் $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$ என நிறுவுக.

Or

- (b) Let $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ be a function defined throughout some ε neighborhood of the non-zero point, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Suppose that the first partial derivatives of the functions u and v with respect to r and θ exist in that neighborhood and are continuous functions of (r, θ) at (r_0, θ_0) . Then show that the partial derivatives satisfy the Cauchy-Riemann equations in polar form at (r_0, θ_0) and the derivative $f'(z_0)$ exists.

$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ என்ற பூஜ்ஜியமில்லா புள்ளிகள் சில ε ன் அண்மையில் $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ என்ற சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. u மற்றும் v என்ற சார்பின் (r, θ) -வை பொறுத்த முதல் பகுதி வகைகெழுக்கள் அண்மையில் இருக்கும் மேலும் அவை (r_0, θ_0) என்ற புள்ளியின் தொடர்ச்சி சார்பாக இருக்கும் எனில், அந்த பகுதி வகைகெழுக்கள் (r_0, θ_0) -வில் போலார் வடிவத்தில் உள்ள கர்ஷி-ரீமான் சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்யும் மற்றும் $f'(z_0)$ என்ற வகைகெழுவாக இருக்கும் என காட்டுக.

13. (a) Show that $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ is harmonic and find its harmonic conjugate v .

$u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ ஒரு இசைச் சார்பு எனக்காட்டி அதன் இணைகிய இசைச் சார்பு v -ஐக் காண்க.

Or

- (b) Suppose that the analytic function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ maps a domain D_z in the Z plane onto a domain D_w in the w plane. If $h(u, v)$ is a harmonic function defined on D_w , then prove that the function $H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$ is harmonic in D_z .

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ என்ற பகுமுறை சார்பானது Z தளத்தில் உள்ள D_z மதிப்பகத்திலிருந்து w தளத்திலுள்ள D_w என்ற மதிப்பகத்திற்கு கோப்பு ஆகும் மற்றும் $h(u, v)$ என்பது D_w மேல் வரையறுக்கப்பட்ட இசை சார்பு எனில் D_z இசைச் சார்பிலுள்ள $H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$ என்ற சார்பை நிறுவுக.

14. (a) Find the linear fractional transformation that maps the points. $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1$ onto the points $w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1$.

$z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1$ என்ற புள்ளிகள் வெளிகோப்பு புள்ளிகள் $w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1$ ஐக் கோர்க்கும் ஒருபடி பகுதி உருமாற்றத்தினைக் கண்டுபிடி.

Or

- (b) Briefly explain the transformation $w = \sin z$. $w = \sin z$ என்ற உருமாற்றத்தை சுருக்கமாக விவரி.

15. (a) Evaluate $\int_C f(z) dz$ if C is $|z| = 1$ and $f(z) = \bar{z}$.

C என்பது $|z| = 1$ மற்றும் $f(z) = \bar{z}$ எனில்

$\int_C f(z) dz$ என்ற தொகையின் மதிப்புக் காண்க.

Or