

NOVEMBER/DECEMBER 2019

BMA52 — REAL ANALYSIS — I

Time : Three hours

Maximum 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Find the range of the function $f(x) = x^2$ for $-\infty < x < \infty$.
-∞ < x < ∞ யில் $f(x) = x^2$ என்ற சார்பின் வீச்சு காண்க.
2. Define characteristic function of subset A in a set S .
 S என்ற கணத்தில், A என்ற உட்கணத்தின் பான்மை சார்பை வரையறு.
3. Define monotone sequence.
வரையறு : ஓரியல் தொடர்முறை
4. Define Cauchy sequence.
கோலியின் தொடர் வரிசையை வரையறு.



5. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது குவியும் தொடர் எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ என நிறுவுக.

6. Give an example of alternating sequence.

ஒரு மாறும் தொடர்முறைக்கு ஓர் உதாரணம் தருக.

7. Define the norm of a sequence of l^2 .

l^2 -ல் ஒரு தொடரின் நீளம் வரையறு.

8. Define strictly increasing function.

வரையறு : ஏறும் சார்பு.

9. Define open ball of radius r about a .

a யை மையமாகவும், r -ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட திறந்த கோளத்தை வரையறு.

10. Define dense subset of a metric space.

மெட்ரிக் வெளியில் அடர்த்தி உட்கணம் வரையறு.



17. Prove that $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent. Show that limits lies between 2 and 3.

$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற தொடர்முறை குவியும் தொடர்முறை என நிரூபி. மேலும், அதன் எல்லை 2 மற்றும் 3 என்ற எண்களுக்கு இடையில் அமையும் என நிரூபி.

18. State and prove root test for absolute convergent of a series of real numbers.
மெய்யெண்களுக்கான ஒரு அறக்குவி தொடருக்கான மூல சோதனையை எழுதி நிறுவுக.

19. Prove that if $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = L$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = N$ then $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)g(x) = LN$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = L$ மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = N$ எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)g(x) = LN$ என நிறுவுக.

20. Prove that f is continuous if and only if the inverse image of every open set is open.

f என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானதாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை யாதெனில் ஒவ்வொரு திறந்த கணத்தின் தலைகீழ் சார்பின் பிம்பம் திறந்த கணம் என நிறுவுக.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that the countable union of countable sets is countable.

ஒரு எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் சேர்ப்பு எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

Or

- (b) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of nonnegative numbers and if $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ then prove that $L \geq 0$.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மிகையெண்களை கொண்ட தொடர்முறை மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ எனில் $L \geq 0$ என நிரூபி.

12. (a) If the sequence of real numbers $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent then prove that it is bounded.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய்யெண்களை கொண்ட தொடர்முறை குவியும் எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது வரம்புடைய தொடர்முறை என நிறுவுக.

Or



- (b) Find the value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4}$ ன் மதிப்பு காண்க.

13. (a) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்ற தொடரின் குவிதலை ஆராய்க.

Or

- (b) Test the convergence of the series $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ என்ற தொடரின் குவிதலை ஆராய்க.

14. (a) If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a non-increasing sequence of positive numbers and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மிகை எண்ணுக்கான குறையும்

தொடர்முறை மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது குவியும்

தொடர் எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ என நிறுவுக.

Or

4

2936

- (b) State and prove Schwarz inequality in class l^2 .

l^2 -ல் ஸ்வார்ட்ஸ் சமமின்மையை எழுதி நிறுவுக.

15. (a) If E is any subset of a metric space M then prove that \bar{E} is closed.

M என்ற மெட்ரிக் வெளியில் E என்பது ஒரு உட்கணம் எனில் \bar{E} என்பது ஒரு முடிய கணம் என நிரூபி.

Or

- (b) If f and g are real-valued functions, which are continuous at a and $f(a)$ respectively then prove that $g \circ f$ is continuous at a .

f மற்றும் g என்ற மெய்யெண் சார்புகள் முறையை a மற்றும் $f(a)$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது எனில் $g \circ f$ என்பது a -யில் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that the set $[0, 1]$ is uncountable.

$[0, 1]$ என்ற கணம் எண்ணிடத்தக்கது அல்ல என நிரூபி.

5

2936